

Olimpiada de matematică

faza locală

Clasa a 10-a, Soluții și bareme

1. Să se studieze monotonia funcției $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2^x 3^{1-x} + 2^{1-x} 3^x$.

Soluție. Fie $x < y$. Se arată că

$$f(x) - f(y) = 3 \left(\left(\frac{2}{3} \right)^x - \left(\frac{2}{3} \right)^y \right) \left(1 - \left(\frac{2}{3} \right)^{1-x-y} \right)$$

..... (4 p)
Deci, dacă $x, y \leq \frac{1}{2}$, $f(x) > f(y)$, iar dacă $x, y \geq \frac{1}{2}$, $f(x) < f(y)$ (3 p)

2. Fie $a, b, c \in \mathbb{C}$, cu proprietatea

$$|a| = |b| = |c| = |a + b + c|.$$

Să se arate că

$$(a + b)(b + c)(c + a) = 0.$$

Soluție. Fie $d = -a - b - c$. Atunci

$$|a| = |b| = |c| = |d|$$

și $a + b + c + d = 0$ (3 p)

Geometric, avem patru vectori de același modul, cu suma zero. Adunând vectorii cu regula poligonului, obținem un romb, deci sunt doi câte doi vectori opuși. (4 p)

3. Fie $a, b, c \in \mathbb{R}$ numere pozitive. Să se rezolve ecuația

$$\sqrt{ax + b} + \sqrt{bx + c} + \sqrt{cx + a} = \sqrt{a - bx} + \sqrt{b - cx} + \sqrt{c - ax}.$$

Soluție. Se observă soluția $x = 0$ (2 p)

Cum membrul stâng este o funcție strict crescătoare, iar cel drept una strict descrescătoare, soluția este unică..... (5 p)